

TEST DE AUTOEVALUARE L9

1. Să se arate că drumul $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este rectificabil

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t^2 \sin \frac{\pi}{t}, t^2 \right), & t \in (0,1]; \\ (0,0), & t = 0. \end{cases}$$

Răspuns. $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ este mărginită.

2. Să se afle lungimea elipsei de semiaxe a, b , $a > b$.

Răspuns. $2a\pi \left[1 - \frac{e^2}{2^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} e^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} e^6 - \dots \right]$, unde

$$e^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip:

3. $\int_{\gamma} y ds$, unde $\gamma: \begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$.

Răspuns. $\frac{3\sqrt{2}a^2}{40}$.

4. $\int_{\gamma} \sqrt{y} ds$, unde $\gamma: \begin{cases} x = 2t; \\ y = t^2; \\ z = \frac{2}{3}t^3, \end{cases} \quad t \in [0,1]$.

Răspuns. $6\sqrt{3} - 2 + 3 \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

5. Să se calculeze masa firului material cu densitatea

$$\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2) \ln z$$

și care are forma arcului de curbă:

$$\widehat{AB} : \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t; \quad t \in [0, 1]. \\ z = e^t, \end{cases}$$

Răspuns. Masa = $\int_{\widehat{AB}} \rho(x, y, z) ds = \frac{1 + 2a^3}{3\sqrt{3}}.$

Să se calculeze integralele curbilinii de al doilea tip:

6. $\int_{\gamma} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$

$$\gamma : \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Răspuns. $-2\pi.$

Să se arate că următoarele integrale sunt independente de drum și să se calculeze:

7. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy dx + x^2 dy.$

Răspuns. 1.

8. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pe un drum care nu trece prin punctul $(0,0).$

Răspuns. 9.

9. Să se calculeze

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,2)} yz dx + xz dy + xy dz,$$

verificând că integrala este independentă de drum.

Răspuns. Dacă notăm cu

$$P(x, y, z) = yz, \quad Q(x, y, z) = xz, \quad R(x, y, z) = xy,$$

atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Să se calculeze integrala curbilinie:

$$10. \int_C xyz d\ell, \text{ dacă } C = \begin{cases} x = t; \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \quad t \in [0,1]. \\ z = \frac{1}{2}t^2, \end{cases}$$

Răspuns. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$.

TEST DE AUTOEVALUARE L10

1. Să se calculeze ariile domeniilor plane:

a) $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$; b) $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq y \leq 3x \right\}$.

Răspuns: a) πab ; b) $\frac{4\pi}{3}$.

2. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D x \sin(xy) dx dy$, unde $D = [0, 1] \times [0, \pi]$;

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, unde $D = \left\{ (x, y) \mid x \in [1, 2], \frac{1}{x} \leq y \leq x \right\}$.

Răspuns: a) 1; b) $\frac{9}{4}$.

3. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele:

a) $z = 0, x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3$; b) $z = xy^2, x^2 + y^2 = R^2, y = 0, x = 0$, aflat în primul cadran.

Răspuns: a) 3π ; b) $\frac{R^5}{15}$.

4. Să se calculeze masa unei plăci plane de grosime neglijabilă dacă densitatea

$\rho(x, y) = x^2 + y^2$, iar $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4 \right\}$.

Răspuns. $\frac{75\pi}{2}$.

5. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane de grosime neglijabilă cu densitatea $\rho(x, y) = y$ și care are forma dată de domeniul

$$D = \{(x, y) \mid x + y \leq 2, y \geq x^2\}.$$

Răspuns. $x_G = -\frac{25}{32}, y_G = \frac{235}{112}.$

6. Să se afle momentul de inerție în raport cu axa Ox a triunghiului delimitat de dreptele $x = 2, y = 2, x + y - 2 = 0$.

Răspuns. 4.

7. Să se calculeze aria figurii limitate de curbele

$$x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x; y = x \text{ și } y = 0.$$

Răspuns. Se trece la coordonate polare, $A = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right).$

7. Să se calculeze integrala

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

dacă domeniul D este limitat de elipsa, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \in \mathbb{R}_+^*$. **Răspuns.** $\frac{2}{3}\pi ab$.

8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene limitată de curbele $x^2 = ay, x + y = 2a, a > 0$.

Răspuns. $\left\{x_G = -\frac{a}{2}; y_G = \frac{8}{5}a.\right.$

9. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$xy = a^2; x + y = \frac{5}{2}a, a > 0.$$

Răspuns. $\frac{15}{8} - 2 \ln 2.$

TEST DE AUTOEVALUARE L11

1. Să se calculeze volumele domeniilor din $\mathbb{R}^3$:

a) $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\};$

b) $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, x^2 + y^2 \leq 4z\}$

Răspuns : a) $\frac{\pi a^4}{2}$; b) $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 4)$.

2. Să se calculeze: $\iiint_V 45x^2 y dx dy dz$, unde

$$V = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z \leq 8\}.$$

Răspuns. 128.

3. $\iiint_V z dx dz dy$, unde domeniul V este mărginit de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ și

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Răspuns. $\frac{5\pi R^4}{24}$.

4. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate a jumătății superioare a unui elipsoid omogen de semiaxe a, b, c .

Răspuns. $x_G = 0$; $y_G = 0$; $z_G = \frac{3c}{8}$.

5. Să se calculeze

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

Răspuns. $\pi\sqrt{\pi}$.

6) Să se calculeze $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ dacă domeniul

$$\Omega = \{(x, y, z) | z \geq 0, r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}, r, R \in \mathbb{R}_+^*; r < R.$$

Răspuns. $\frac{4}{15}\pi(R^5 - r^5)$.

7. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele următoare:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 16; z^2 = x^2 + y^2; \\ x = 0; y = 0; z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

Răspuns. $\frac{21(2 - \sqrt{2})}{4}\pi$.

8. Să se calculeze $\iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ dacă domeniul Ω este limitat de

suprafața $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Răspuns. $\frac{4}{5} \pi abc$.

9. Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafețele

$$az = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0).$$

Răspuns. $\frac{\pi a^3}{6}$.

10. Să se calculeze volumul corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ și suprafața $x^2 + y^2 = 3z$ (interiorul acestei suprafețe).

Răspuns. $\frac{19\pi}{6}$.

11. Din porțiunea bilei $x^2 + y^2 + z^2 \leq c$ aflată în primul octant ($x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$) se decupează un corp OABC limitat de planele de coordonate și de planul $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ ($a \leq c; b \leq c$) $a, b, c > 0$.

Determinați masa acestui corp dacă în fiecare punct densitatea sa este egală cu z .

Răspuns. $\frac{ab}{24} (6c^2 - a^2 - b^2)$.

12. Determinați coordonatele centrului de greutate și momentele de inerție ale piramidei formată de planele $x = 0, y = 0, z = 0; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Răspuns.
$$\begin{cases} x_G = \frac{a}{4}, \quad y_G = \frac{b}{4}, \quad z_G = \frac{c}{4}; \\ J_x = \frac{a^3 bc}{60}, \quad J_y = \frac{b^3 ac}{60}, \quad J_z = \frac{c^3 ab}{60}; \\ J_0 = \frac{abc}{60} (a^2 + b^2 + c^2). \end{cases}$$

TEST DE AUTOEVALUARE L12

1. Să se calculeze integrala de suprafață $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma$, unde

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, a > 0 \right\}.$$

Răspuns. πa^3 .

2. Să se calculeze integrala de suprafață $\iint_S \frac{z \, d\sigma}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}$,

$$\text{unde } S = \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq h \right\}.$$

Răspuns. πh^2 .

3. Să se calculeze $\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \, d\sigma$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{unde } S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Răspuns. $\frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot a^2}{a \cdot b \cdot c}$.

4. Să se calculeze $\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy$,

$$\text{unde } S \text{ este fața exterioară a conului } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq z \leq b.$$

Răspuns. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

5. Să se calculeze $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy$,

$$\text{unde } S \text{ este fața exterioară a cilindrului } x^2 + y^2 = a^2, -h \leq z \leq h, a, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $3\pi a^2 h$.

6. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ prin fața exterioară a suprafeței care delimitează domeniul

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \leq y, a, b, c > 0 \right\}.$$

Răspuns. 0.

7. Să se calculeze $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ dacă S este suprafața exterioară a conului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b, a, b > 0).$$

Răspuns. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}$.

8. Să se calculeze $\iint_S (xy + yz + zx) d\sigma$ dacă S este porțiunea suprafeței conului

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ decupată de suprafața } x^2 + y^2 = 2ax, a > 0.$$

Răspuns. $\frac{64\sqrt{2}}{15} a^4$.

9. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeței omogene

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a, a > 0.$$

Răspuns. $x_G = y_G = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

10. Să se calculeze integrala $\iint_S xyz d\sigma$ dacă S este porțiunea din planul

$$x + y + z = 1 \text{ aflată în planul octant.}$$

Răspuns. $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

11. Să se calculeze integrala $\iint_S y^2 z dx dy + x z dy dz + x^2 y dx dz$ dacă S suprafața din

$$\text{primul octant constituită din } z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 1 \text{ și planele de coordonate.}$$

Răspuns. $\frac{\pi}{8}$.

12. Să se calculeze $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$ dacă S este suprafața exterioară

$$\text{a sferei } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, a, b, c, R > 0.$$

Răspuns. $\frac{8\pi}{3} (a + b + c) R^3$.

TEST DE AUTOEVALUARE L13

Folosind formula lui Green, să se calculeze:

$$1. \int_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy ,$$

unde Γ este cercul $x^2 + y^2 = R^2$ parcurs în sens pozitiv.

$$\text{Răspuns. } \frac{\pi R^4}{2} .$$

$$2. I = \int_{\Gamma} xy dx + (x^2 - y^2) dy ,$$

unde Γ este conturul $\triangle OAB$ de vârfuri $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,2)$ parcurs în sens pozitiv.

$$\text{Răspuns. } \frac{3}{2} .$$

$$3. I = \int_{\Gamma} (3x^2 - 8y^2) dx + (4x - 6xy) dy ,$$

unde Γ este frontiera domeniului

$$D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} .$$

$$\text{Răspuns. } \frac{5}{3} .$$

Să se calculeze integralele de suprafață, utilizând formula Gauss-Ostrogradski:

$$4. \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy ,$$

unde S este fața exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$, delimitat de planele $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$$\text{Răspuns. } \frac{a^3}{2} .$$

$$5. I = \iint_S x(y^2 - z^2) dy dz + y(z^2 - x^2) dz dx + z(x^2 - y^2) dx dy ,$$

unde S este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\text{Răspuns. } 0 .$$

$$6. I = \iint_S x dy dz + y dz dx - 2z dx dy ,$$

unde S este fața exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$ mărginit de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

$$\text{Răspuns. } 0 .$$

Să se calculeze integralele următoare, aplicând formula lui Stokes:

7. $\int_{\overline{ABCA}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, unde $\overline{ABCA}$ este conturul poligonal determinat de punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$.

Răspuns. $-a^3$.

8. $\int_{\Gamma} (2x - z) dx + (y - z + 1) dy + z^2 dz$,

unde Γ mărginește suprafața

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2], x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Răspuns. 0.

9. Fie câmpul vectorial $F(x, y, z) = (2z - 2y, 2x - 2z, 2y - 2x)$

și elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$. Să se calculeze circulația câmpului F în lungul curbei de intersecție dintre elipsoid și semiplanele de coordonate $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ în sens pozitiv.

Răspuns. 11π .

10. Să se calculeze $\oint_{\partial D} (x - y) dx + dy$, dacă

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}.$$

Răspuns. $\frac{\pi}{2}$.

11. Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz,$$

curba C este obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$.

Răspuns. 4π .

12. Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

dacă C este curba aflată la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \cdot R \cdot x$ cu cilindrul

$x^2 + y^2 = 2 \cdot r \cdot x$, $0 < r < R$, $z > 0$, parcursă în sens trigonometric privind dinspre partea pozitivă a axei Ox .

Răspuns. $2\pi Rr^2$.